PO CO NAM SZEŚCIENNA KOSTKA I MATEMATYCZNE DYSPUTY O JEJ RZUCANIU

Adam Płocki
Zakład Edukacji Matematyczno-Przyrodniczej, Insytut Pedagogiczny PWSZ w Nowym Sączu
adplocki@up.krakow.pl

Wprowadzenie

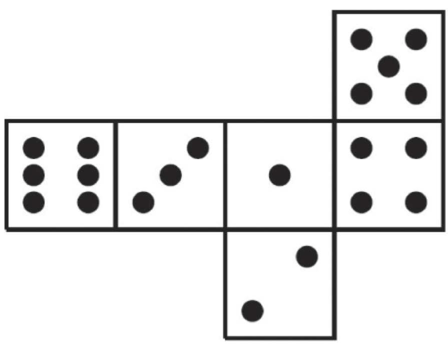
Rachunek prawdopodobieństwa prezentowany aktualnie w szkole jest matematyką oderwaną od życia. Bohaterami zadań są dziwne procedury zwane *losowaniami*. Mówi się o losowaniu kuli z urny, ale także jednej z grona wielu osób, a nawet wierzchołka sześcianu (a ten jest punktem). Rozważa się losowania kul z urny, rzuty monetą i rzuty kostką.

Nie wiadomo, na czym mają polegać niektóre z tych procedur (losowanie człowieka, czy losowanie punktu). Nie wiadomo także komu i na co mogą być potrzebne w życiu matematyczne dysputy związane z tymi czynnościami.

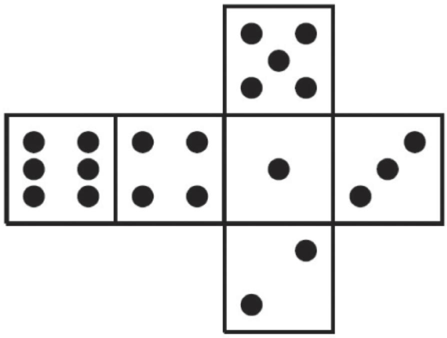
Praca dotyczy miejsca i roli kostki do gry w matematyce zwanej *rachunkiem prawdopodobieństwa*. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, komu i w jakiej sytuacji może przydać się kostka, a komu i do czego mogą być przydatne obliczane prawdopodobieństwa rozmaitych zdarzeń związanych z rzutami kostką. Pokażemy, jak na lekcji konstruować kostkę z trzech kart do gry, albo z czterech kolorowych kul, a także z kawałka ciasta i rodzynka. Poznamy kilka sztuczek z kostką i jej rzucaniem.

Kostka jako przyrząd losujący

Kostka do gry powstała z sześcianu przez rozmieszczenie na jej ścianach oczek w liczbach od 1 do 6, ale tak, że na każdych dwóch przeciwległych ścianach jest łącznie 7 oczek. Ta arytmetyczna własność w_K sprawia, że kostka jest niezwykle ciekawym obiektem w matematyce.



Rysunek 1. Siatka kostki do gry – wariant 1



Rysunek 2. Siatka kostki do gry – wariant 2

Na rysunkach 1 i 2 mamy dwie siatki kostki. Nietrudno sprawdzić, że po sklejeniu obie kostki mają własność w_K. Czym się te kostki różnią?

Rzut kostką jest doświadczeniem losowym. Mówimy, że kostka jest *przyrządem losującym*. Rzucając kostką obserwujemy liczbę oczek na jej górnej ścianie po upadku. Ta liczba wyrzuconych oczek, jeśli o niej mówimy zanim kostka zostanie rzucona, jest *zmienną losową*, która przyjmuje wartości 1, 2, 3, 4, 5, 6 i każdą z jednakowym prawdopodobieństwem. Zauważ, jak ważny jest tu czas.

Liczba oczek na dolnej ścianie po upadku kostki, jeśli mówić o niej przed rzutem kostką, jest także zmienną losową, która przyjmuje wartości 1, 2, 3, 4, 5, 6 i każdą z jednakowym prawdopodobieństwem.

Za *wyrzuconą liczbę oczek* w rzucie kostką można zatem uważać albo

- liczbę oczek na górnej ścianie kostki, albo
- liczbę oczek na dolnej ścianie po upadku kostki.

Wydaje się, że suma liczb oczek na czterech bocznych ścianach kostki, jeśli ją rozważać przed rzutem kostką, jest także zmienną losową, ale tak nie jest. Ten fakt oraz własność w_K może być na lekcji przedmiotem matematycznej refleksji i to połączonej z odrobiną emocji, dzięki prostym turniejom.

Turniej 1. Każdy uczeń rzuca kostką, a zwycięża ten, kto na bocznych ścianach leżącej kostki ma najwięcej oczek. Zwycięzcy nie daje się wyłonić.

Turniej 2. Każdy z uczniów stawia wieżę z dwóch (z trzech) kostek, a zwycięża ten, kto na bocznych ścianach swojej wieży ma najwięcej oczek. Zwycięzcy nie daje się wyłonić.

Tak rodzą się pytania:

Dlaczego tak się dzieje? Jak to wytłumaczyć na gruncie matematyki?

Chodzi tu o *refleksję a posteriori (po fakcie),* na podstawie obserwacji, jako osobliwą w stochastyce (badaniu modeli zjawisk losowych) aktywność matematyczną (Płocki, 2005, s. 264).

Suma liczb oczek na czterech bocznych ścianach kostki jest stale równa 14 (nie jest ona zmienną losową). Jest tak, bo 4 boczne ściany kostki tworzą dwie pary ścian przeciwległych a na takich dwóch ścianach jest łącznie 7 oczek.

Liczba oczek na bocznych ścianach wieży nie zależy od ułożenia kostek i jest iloczynem liczby kondygnacji i liczby 14.

Sztuczki z kostkami, arytmetyka i idea fuzjonizmu

W kolejnych przykładach ukażemy rolę kostki w integracji szkolnej matematyki.

Przykład 1. [Sztuczka z jedną kostką]

Pierwsze spotkanie ucznia z kostką na lekcji matematyki rozpocznijmy od pewnej sztuczki. Nauczyciel wybiera jednego z uczniów, sam oddala się tak, aby dalsze polecenia ten uczeń wykonywał poza zasięgiem jego wzroku, nie zdradzając jednak wyników kolejnych poleceń. Uczeń rzuca kostką i do liczby wyrzuconych oczek dodaje liczbę oczek na górnej ścianie kostki po jej odwróceniu (suma s_1). Następnie rzuca tą kostką i do ostatniej sumy dodaje liczbę wyrzuconych oczek. Tej ostatniej sumy s_2 uczeń nie zdradza. Nauczyciel podchodzi do leżącej kostki, rzuca nią, na chwilę się zamyśla i bezbłędnie odgaduje liczbę s_2. Jak to jest możliwe?

Zauważmy, że s_1 jest sumą liczb oczek na dwóch przeciwległych ścianach kostki, a zatem $s_1 = 7$ a s_2 jest sumą tej liczby 7 i liczby oczek wyrzuconych w drugim rzucie kostką, a tę liczbę nauczyciel poznaje podchodząc do stołu. Odgadywana liczba s_2 jest więc sumą liczby oczek na górnej ścianie leżącej kostki i liczby 7. Samo rzucanie kostką przez nauczyciela i chwilowa zaduma nad wynikiem tego rzutu, ma jedynie odwracać uwagę ucznia i stwarzać pozory tajemniczości. Istotnym argumentem jest w tym przypadku własność w_K.

Opisaną sztuczkę można skomplikować, czyniąc ją bardziej zaskakującą.

Przykład 2. [Sztuczka z trzema kostkami]

Rzuć (poza zasięgiem mojego wzroku) trzema kostkami, białą, czerwoną i zieloną, a następnie:

- policz ile łącznie wypadło oczek i zapamiętaj tę sumą s_1,
- odwróć kostkę czerwoną i do sumy s_1 dodaj liczbę oczek na górze po odwróceniu czerwonej kostki (suma s_2),
- rzuć czerwoną kostką i do s_2 dodaj liczbę wyrzuconych oczek (suma s_3).

Ja potrafię odgadnąć sumę s_3. Wystarczy, że teraz ja rzucę tymi trzema kostkami i bezbłędnie zdradzę sumę s_3. Jak jest możliwe?

Odpowiedź na ostatnie pytanie jest osobliwym zadaniem i to arytmetycznym.

Przykład 3. [Arytmetyka a odgadywanie wyniku rzutu kostką]

Poza zasięgiem mojego wzroku rzuć kostką, a następnie:

- liczbę wyrzuconych oczek (ja jej nie znam) pomnóż przez 5,
- do uzyskanego iloczynu dodaj 3,
- otrzymaną sumę pomnóż przez 2,
- do tak otrzymanej liczby dodaj liczbę oczek na dolnej ścianie leżącej kostki i zdradź mi tę końcową sumę.

Ujawniona końcowa suma jest liczbą dwucyfrową. Jeśli od tej liczby odejmiemy 6, to otrzymamy nową liczbę dwucyfrową. Jej cyfra dziesiątek jest liczbą oczek na górnej ścianie leżącej kostki, cyfra jedności jest liczbą oczek na dolnej ścianie tej kostki.

Gdyby wypadło 6 oczek, to kolejne działania byłyby następujące:

$$6 \cdot 5 = 30,$$

$$30 + 3 = 33,$$

$$33 \cdot 2 = 66,$$
$$66 + 1 = 67,$$
$$67 - 6 = 61.$$

Na górze leżącej kostki jest zatem 6 oczek, na dole zaś jedno. Uzasadnianie tej sztuczki jest arytmetycznym zadaniem. Jeśli x oznacza liczbę oczek wyrzuconych kostką, to w wyniku kolejnch działań otrzymujemy liczbę $(5 \cdot x + 3) \cdot 2 + (7 - x)$. Zauważmy, że

$$(5 \cdot x + 3) \cdot 2 + (7 - x) = 10 \cdot x + 6 + (7 - x) = [10 \cdot x + (7 - x)] + 6.$$

Różnica ostatniej liczby i liczby 6 jest liczbą $[10 \cdot x + (7 - x)]$. Liczba $(7 - x)$ jest jednocyfrowa. Jest to liczba oczek na dolnej ścianie leżącej kostki. Suma $[10 \cdot x + (7 - x)]$ jest liczbą dwucyfrową, której pierwszą cyfrą jest x (czyli wynik rzutu kostką), drugą zaś $(7 - x)$, a więc liczba na dole leżącej kostki.

Zdarzenia praktycznie niemożliwe i stochastyka wokół nas

Zdarzenie praktycznie niemożliwe - Zdarzenie A związane z doświadczeniem losowym δ nazywamy *praktycznie niemożliwym*, jeżeli jego prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,05. We wnioskowaniach statystycznych liczba $\cdot\alpha = 0{,}05$ nazywa się *poziomem istotności*.

Zdarzenie praktycznie pewne - Zdarzenie B związane z doświadczeniem losowym δ nazywamy *praktycznie pewnym*, jeżeli jego prawdopodobieństwo jest większe od 0,95.

Przykład 4. Z rzutem sześcioma kostkami zwiążmy dwa zdarzenia:

A = {*wypadną wszystkie liczby oczek*},

B = {*któraś z liczb oczek nie wypadnie na żadnej kostce*}.

Nietrudno obliczyć (jest to treść typowego szkolnego zadania), że

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}0154 \text{ i } P(B) = 1 - P(A) = 0{,}9846,$$

a zatem A jest zdarzeniem praktycznie niemożliwym, B zaś jest zdarzeniem praktycznie pewnym. **Postawmy pytanie: — *do czego mogą się przydać te matematyczne fakty?***

Ryzyko i szanse, szczęście i pech - Ilekroć wydarzy się coś, co jest praktycznie niemożliwe (a więc bardzo mało prawdopodobne) i co kojarzy nam się wyjątkowo pozytywnie, tylekroć mówimy o *szczęściu*. Jeśli wydarzy się coś, co jest praktycznie niemożliwe i co kojarzy nam się wyjątkowo negatywnie, to mówimy o *pechu*. Szczęście i pech mogą być treścią matematycznych zadań, które dotyczą zdarzeń praktycznie niemożliwych.

Podstawą wnioskowań dotyczących podejmowania decyzji, bądź weryfikacji pewnych hipotez, jest fakt, że pewne zdarzenie jest praktycznie niemożliwe. Wnioskowania te opierają się na następującej idei.

Zasada praktycznej pewności - Jeżeli zdarzenie A związane z doświadczeniem losowym δ jest praktycznie niemożliwe, to możemy być praktycznie pewni, że ono nie zajdzie, jeśli (za chwilę, jutro, za tydzień) wykonamy doświadczenie δ.

Powtórz rzut sześcioma kostkami wiele razy i skonstatuj, że

- ani raz nie zaszło zdarzenie A,
- za każdym razem któraś z liczb oczek nie wypadła na żadnej kostce (a więc zaszło zdarzenie B).

Czterokrotny rzut kostką i jego opis na gruncie matematyki

Czterokrotny rzut kostką jest doświadczeniem losowym. Jego wynik jest czterowyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, wyraz j -ty tego ciągu jest liczbą oczek wyrzuconych w j -tym rzucie. Jeśli w j -tym rzucie wypadnie j oczek, to mówmy o *skojarzeniu w j -tym rzucie* (j = 1, 2, 3, 4).

Wynikami czterokrotnego rzutu kostką są ciągi: 6434, 6666, 1234. Wszystkich tych wyników jest 6^4, czyli 1296 i każdy jest jednakowo prawdopodobny.

Przykład 5. Z czterokrotnym rzutem kostką zwiążmy zdarzenia:

A = { *w każdym rzucie nastąpi skojarzenie*},

B = { *w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek*},

Zdarzeniu A sprzyja tylko wynik 1234, a zatem $P(A) = \frac{1}{1296} \approx 0{,}00077$.

Zdarzenie A jest zatem praktycznie niemożliwe.

Zdarzeniu B sprzyjają wyniki: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, a zatem

$P(B) = \frac{6}{1296} \approx 0{,}004629 < 0{,}05$

Zdarzenie B jest 6 razy bardziej prawdopodobne niż zdarzenie A, ale także jest praktycznie niemożliwe.

Przed wykonaniem czterokrotnego rzutu kostką *można być praktycznie pewnym, że nie zajdzie zdarzenie A i że nie zajdzie zdarzenie B*.

Po co nam to było – komu i do czego mogą być potrzebne dysputy o czterokrotnym rzucaniu kostką

Przykład 6. Testowy sprawdzian wiedzy z przyrody obejmuje (zaledwie) 4 pytania, do każdego dołączonych jest 6 odpowiedzi, z których jedna i tylko jedna jest prawidłowa. Uczeń ma do każdego pytania podkreślić odpowiedź (jego zdaniem) prawidłową. Za wskazanie prawidłowej odpowiedzi do każdego pytania uczeń dostaje ocenę pozytywną. Czy taka ocena jest wiarygodna? Nie jest bowiem niemożliwe, że uczeń, który nic nie umie z materiału objętego testem, trafi w drodze zgadywania na właściwą odpowiedź do każdego pytania, dostanie zatem pozytywną ocenę, a ona mu się nie należy. Jakie ma ów uczeń szanse na uzyskanie pozytywnej oceny bez uczenia się?

Postawione wyżej pytania dotyczą pewnego prawdopodobieństwa. Można je obliczyć przy założeniu, że uczeń nic nie umie z materiału objętego testem (hipoteza H_0). To *prawdopodobieństwo* jest dla ucznia oceną *szans*, że nie ucząc się dostanie pozytywną ocenę, Dla nauczyciela to prawdopodobieństwo jest oceną pewnego *ryzyka*.

Postawmy hipotezę, że uczeń nic nie umie z materiału objętego testem. Nic nie stoi na przeszkodzie, by przyjąć, że właściwa odpowiedź dla j -tego pytania to jest j -ta odpowiedź (j = 1, 2, 3, 4). Uczeń o tym nie wie. Ten uczeń zgaduje. Prawdopodobieństwo, że trafnie wskaże odpowiedź do 1. pytania jest takie, jak prawdopodobieństwo wyrzucenia kostką jedynki. Prawdopodobieństwo trafienia na właściwą odpowiedź do drugiego pytania jest takie, jak prawdopodobieństwo wyrzucenia dwójki w drugim rzucie kostką itd. Tak więc prawdopodobieństwo trafienia na właściwą odpowiedź do każdego z czterech pytań (jeśli uczeń nic nie umie) jest równe prawdopodobieństwo zdarzenia A, o którym mowa w przykładzie 5), a więc jest równe $\frac{1}{1296}$, czyli około 0,00077. Jest zatem praktycznie niemożliwe, aby uczeń, który nic nie umie, dostał ocenę pozytywną.

Liczba $\frac{1}{1296}$ jest dla nauczyciela oceną wspomnianego ryzyka. To ryzyko jest zatem znikome, a więc pozytywna ocena jest wiarygodna. Gdyby uczniowi, który nic nie umie, udało się trafić na wszystkie prawidłowe odpowiedzi, to powiedzielibyśmy, że miał szczęście (zdarzyło się wszak coś, co jest praktycznie niemożliwe i co kojarzy mu się pozytywnie).

Możliwe liczy trafnych odpowiedzi wskazanych przez ucznia, który nic nie umie (hipoteza H_0) to są: 0, 1, 2, 3, 4. W zbiorze tych liczb wyróżnia się liczba 4, która daje podstawy do kwestionowania hipotezy H_0, ta liczba 4 przemawia za wiedzą (w stochastyce mówimy, że ta liczba należy do *obszaru krytycznego* przy weryfikajci hipotezy H_0, (Płocki, 2011, s. 226-227).

Można teraz zapytać, czy za 3 poprawnie wskazane odpowiedzi też można stawiać ocenę pozytywną (a więc czy liczba 3 także należy do obszaru krytycznego). Wydaje się oczywiste, że aby to rozstrzygnąć wystarczy obliczyć prawdopodobieństwo trafienia na 3 prawidłowe odpowiedzi i jeśli jest ono mniejsze niż 0,05, to ocena pozytywna za taki rezultat testowego sprawdzianu jest wiarygodna (bo uzyskanie takiego rezultatu w drodze zgadywania jest praktycznie niemożliwe). Dowodzi się (Płocki, 2011, s. 225), że takie wnioskowanie nie jest poprawne. Wynika to z tzw. *paradoksu de Moivre'a*, (Płocki, 2011, s. 223).

Aby rozstrzygnąć, czy liczba 3 należy do obszaru krytycznego (a więc, czy za 3 trafne odpowiedzi można stawiać ocenę pozytywną) należy obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania w drodze zgadywania co najmniej trzech trafnych odpowiedzi i jeśli ono jest mniejsze niż 0,05, to liczba 3 należy do obszaru krytycznego.

Przykład 7. Loteria oferuje wygranie fantu wartego 50 zł za jedyne 2 zł. Uczestnika takiej loterii nazywajmy *graczem*, właściciela loterii nazywa się *bankierem*. Aby ten fant wygrać, gracz płaci bankierowi 2 zł, a następnie rzuca 4 razy kostką. Jeśli w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek, to fant staje się własnością gracza. Bankier ma tu na uwadze prosperowanie tego hazardu. Gracz będzie tu rozważał swoje szanse na wygranie fantu w jednej próbie (a więc za 2 zł).

Gracz wygra fant w jednej próbie wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie zdarzenie B z przykładu 5. Wygranie fantu w jednej próbie jest zatem praktycznie niemożliwe. Bankier może liczyć na zyski z tego hazardu.

Do ochrony mienia przed kradzieżą stosuje się coraz częściej szyfrowe zamki, kłódki i blokady. Właściciel dobytku chronionego szyfrowym zamkiem mówi o pewnym *ryzyku*, złodziej zaś o pewnych *szansach*. Dla obu jest to pewne *prawdopodobieństwo*. Matematyka dostarcza narzędzi do oceny takiego ryzyka i takich szans.

Przykład 8. Na rysunku 3 mamy dwie szyfrowe kłódki. Aby otworzyć pierwszą, trzeba każdą z czterech gałek ustawić na odpowiednim sektorze wzdłuż pionowej kreski pod gałką. Gałki są ponumerowane. Na rysunku 3 ustawienie gałek na tej kłódce tworzy ciąg 5265. W dolnej części drugiej kłódki znajdują się w rzędzie cztery gałki w kształcie graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego. Na każdym z sześciu ścian bocznych gałki jest wyryta liczba. Aby otworzyć tę kłódkę, trzeba każdą z czterech gałek ustawić na odpowiedniej liczbie wzdłuż dłuższej frontowej ściany kłódki. Na rysunku 3 ustawione na gałkach liczby tworzą ciąg 6536.

Rysunek 3. Dwie zamykane na szyfr kłódki z gałkami

Dla każdej z kłódek z rysunku 3 można ocenić ryzyko, że złodziej zdoła ją otworzyć w jednej próbie. O takim ryzyku mówi właściciel kłódki. Co ma do tej oceny czterokrotny rzut kostką?

Załóżmy, że złodziej przymierza się do otwarcia pierwszej kłódki. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby przyjąć, że jej szyfrem jest ciąg 1234. Trafienie na właściwy sektor na pierwszej gałce jest tak samo prawdopodobne, jak wyrzucenie kostką jedynki. Analogicznie jest w przypadku trzech pozostałych gałek. Trafienie na odpowiedni sektor na każdej z czterech gałek jest tak samo prawdopodobne, jak zdarzenie A z przykładu 5. Jest więc praktycznie niemożliwe, aby złodziej (nie znający szyfru) otworzył tę kłódkę w jednej próbie.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, związanego z czterokrotnym rzutem kostką, jest znów oceną pewnych szans (takie ma na uwadze złodziej) i pewnego ryzyka (o takim mówi właściciel dobytku chronionego tą kłódką).

Kłódki z rysunku 3 zdają się istotnie różnić. Gałki w pierwszej kłódce są walcami, w drugiej graniastosłupami o podstawie sześciokąta. W pierwszej kłódce gałki są w wierzchołkach kwadratu (a sektory są oznaczone także liczbami 7, 8 i 9), w drugiej te gałki są rozmieszczone w rzędzie i oznaczone liczbami od 1 do 6. Dla oceny ryzyka te szczegóły nie mają znaczenia. Gałki na pierwszej kłódce są ponumerowane, a zatem w obu kłódkach jest ważna ich kolejność. Szyfr każdej z tych kłódek jest czterowyrazową wariacją zbioru sześcioelementowego. Nie jest ważne, czy jest to zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czy jakikolwiek inny zbiór liczbowy sześcioelementowy.

Przykład 9. Zamek blokady do roweru z rysunku 4 składa się z czterech obracających się pierścieni podzielonych na 6 ponumerowanych sektorów. Blokada zostaje zwolniona, gdy każdy z pierścieni zostanie ustawiony na odpowiednim sektorze wzdłuż kreski na nieruchomej części zamka. Szyfr tej blokady jest czterowyrazową wariacją zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Rysunek 4. Szyfrowa blokada do roweru

Zadanie 1. Czy kupiłbyś taką blokadę do ochrony swojego roweru przed złodziejem? Jak uzasadnisz tę decyzję na gruncie rachunku prawdopodobieństwa? Co ma do tego czterokrotny rzut kostką?

Rzut kostką a mieszanie i dzielenie ciasta z rodzynkami

Rzut kostką jest doświadczeniem losowym o sześciu jednakowo prawdopodobnych wynikach, którymi są liczby od 1 do 6.

Przykład 10. Ciasto z rodzynkami wymieszano i podzielono na 6 równych (co do masy) części i z każdej uformowano babkę. Zanim te babki trafiły do piekarnika, okazało się, że jeden rodzynek się zabłąkał i nie trafił do ciasta. Na pytanie, co zrobić, aby ten rodzynek znalazł się w babce, można odpowiedzieć odwołując się do matematyki.

O tym, do której z sześciu babek trafi rodzynek w trakcie mieszania i dzielenia ciasta, decyduje przypadek. Skoro masy tych części są równe, to każda ma jednakowe szanse, że ów rodzynek do niej trafi. Ponumerujmy babki liczbami od 1 do 6. Opisane mieszanie ciasta z rodzynkiem i dzielenie go na 6 równych części jest więc (realnym) doświadczeniem losowym o sześciu jednakowo prawdopodobnych wynikach. Tym wynikiem jest babka, do której ów rodzynek trafił. Taki wynik można kodować numerem tej babki z rodzynkiem.

Dla zbłąkanego rodzynka można więc znaleźć babkę za pomocą kostki. Jeśli uformowne babki ponumerujemy liczbami od 1 do 6, to wystarczy teraz rzucić kostką i jeśli wypadnie j oczek, to ów zbłąkany rodzynek należy wcisnąć do babki numer j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Z powyższych rozważań wynika, że kostkę (jeśli np. zaginęła) można ,,zrobić" z kawałka ciasta i jednego rodzynka. Wystarczy w tym celu ciasto z rodzynkiem wymieszać, podzielić na 6 równych kawałków, ponumerować te kawałki od 1 do 6 i teraz (dłubiąc) rozstrzygnąć w której babce znalazł się rodzynek. Jeśli trafił on do babki numer j, to znaczy, że wypadło j oczek.

Nietrudno zauważyć, że za pomocą kawałka ciasta i jednego rodzynka można symulować rzut monetą.

Pojęcie prawdopodobieństwa w matematyce ,,dla każdego" powinno być syntezą rozmaitych aspektów. Obok *aspektu klasycznego* (prawdopodobieństwo jako iloraz liczby przypadków sprzyjających i liczby jednakowo możliwych przypadków, por. przykład 4) i *statystycznego* (częstość zdarzenia jako pewne przybliżenie jego prawdopodobieństwa), mamy także na uwadze *aspekt miarowy*, czyli *geometryczny* (ilustruje ten aspekt ruletka). Te adresowane do uczniów szkoły podstawowej rozważania ukazują prawdopodobieństwo w aspekcie miarowym (bo jako stosunek mas).

Rzut sześcioma kostkami i analogie

Wróćmy do rzutu sześcioma kostkami i do zdarzeń A i B z przykładu 4. Zdarzenie A jest praktycznie niemożliwe, zdarzenie B jest praktycznie pewne. Do czego mogą się przydać te probabilistyczne fakty?

Przykład 11. W kuchni przygotowuje się na deser 6 babek z ciasta, do którego obok innych bakalii dodano 6 laskowych orzechów. Wydaje się, że jest bardzo prawdopodobne, iż w każdej babce będzie laskowy orzech. A co na to rachunek prawdopodobieństwa?

Ponumerujmy babki. Z przykładu 4 wynika, że losowe rozmieszczanie 6 laskowych orzechów w sześciu babkach można symulować rzutem sześcioma kostkami. Liczba kostek, na których wypadło j oczek jest liczbą orzechów, które trafiły do babki numer j. W każdej babce będzie orzech z takim prawdopodobieństwem, z jakim w rzucie sześcioma kostkami wypadnie każda liczba oczek. Z przykładu 4 wynika, że jest praktycznie niemożliwe, aby w każdej babce znalazł się orzech.

Przykład 12. Sześciu wędkarzy wraca z połowów. Łowili na identyczne przynęty i łącznie złowili 6 ryb. Czy można twierdzić, że każdy z nich złowił jedną rybę?

Ponumerujmy wędkarzy. O tym, którego wędkarza przynętę ryba weźmie, decyduje przypadek. Skoro przynęty były jednakowe, to każdy z wędkarzy miał równe szanse, że ryba weźmie jego przynętę. Łowienie jednej ryby przez 6 wędkarzy przypomina zatem rzut kostką. Za pomocą sześciu wędkarzy z jednakowymi przynętami na swoich wędkach można symulować rzut kostką. Wystarczy poczekać, aż ryba weźmię jedną z przynęt.

Z tych rozważań wynika, że czekanie na złowienie łącznie sześciu ryb przez tych wędkarzy jest doświadczeniem losowym, które przypomina rzut sześcioma kostkami. Liczba ryb złowionych przez wędkarza numer j jest niejako liczbą kostek, na których wypadło j oczek.

Jest więc praktycznie niemożliwe, aby każdy z wędkarzy złowił rybę, jeśli łącznie złowiono 6 ryb.

Mówimy tu o wnioskowania apartych na osobliwych stochastycznych analogiach. Podstawą tych analogii jest fakt, że jedno doświadczenie losowe można symulować drugim. W sensie probabilistycznym podstawą tych analogii jest izomorfizm modeli probabilistycznych tych doświadczeń losowych (Płocki, 2005, s. 235).

Jak zrobić kostkę z trzech lub czterech kulek

Zadanie 2. Zginęła ci kostka do gry. Czym można (i jak) ją zastąpić? Jak zrobić kostkę z trzech lub czterech kolorowych kul?

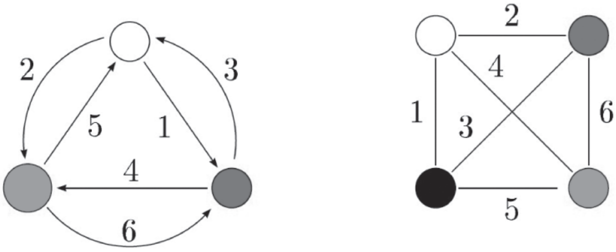
Z przykładu 10 wynika, że rzut kostką można symulować za pomocą kawałka ciasta i jednego rodzynka (uczniowie mówią, że „kostkę da się zrobić z ciasta i rodzynka”). Z przykładu 12 wynika, że można do tego wykorzystać sześciu wędkarzy.

Przykład 13. Rozważmy cztery nieduże i nierozróżnialne w dotyku kule: białą b, czerwoną c, zieloną z i niebieską n. Weźmy je w obie dłonie, potrząśnijmy nimi i wylosujmy prawą ręką równocześnie dwie kule. Wynikiem takiego doświadczenia losowego są dwie wylosowane kule. Na rysunku 5 (prawym) każdy wynik prezentuje odcinek łączący dwie wylosowane kule. Jest zatem 6 możliwych wyników i wszystkie są jednakowo prawdopodobne, jak w przypadku rzutu kostką.

Każdemu odcinkowi na tym rysunku (jako wynikowi losowania dwóch kul) przypisano liczbę od 1 do 6. To przyporządkowanie jest bijekcją ze zbioru wyników losowania dwóch kul na zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli na zbiór wyników rzutu kostką. W ten sposób został określony „słownik” do tłumaczenia wyniku równoczesnego losowania dwóch kul na wynik rzutu kostką.

Ta kostka „zrobiona z czterech kul” jest lepsza od każdej zwykłej (plastikowej lub drewnianej) kostki, którą na co dzień rzucamy (dlaczego?).

Zamiast czterech kolorowych kul można wziąć 4 kule oznaczone liczbami 0, 1, 2 i 4. Losowanie równocześnie dwóch kul spośród tych czterech jest doświadczeniem losowym o sześciu jednakowo prawdopodobnych wynikach. Jeśli wynik losowania kodować sumą liczb na dwóch wylosowanych kulach, to wyniki te tworzą zbiór {1, 2, 3, 4, 5, 6} i każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Opisane losowanie przypomina więc rzut kostką.



Rysunek 5. Jak z trzech lub czterech kul zrobić kostkę do gry

Przykład 14. Dwukrotne losowanie bez zwracania kuli z urny, w której są trzy kolorowe kule, jest także doświadczeniem losowym o 6 jednakowo prawdopodobnych wynikach. Każda strzałka na rysunku 5 przedstawia taki wynik. W jej początku jest kula wylosowana za 1. razem, w jej końcu zaś kula wylosowana za 2. razem. Na rysunku 5 każdemu wynikowi przypisano liczbę oczek w rzucie kostką, a więc określono wspomniany ,,słownik".

Przykład 15. Rzut kostką można symulować za pomocą trzech kart pikowych: waleta (W), damy (D) i króla (K). Po potasowaniu tych kart rozłóżmy je w rzędzie. Wynik takiego doświadczenia losowego jest permutacją zbioru {W, D, K}. Jest 6 takich wyników: WDK, WKD, DWK, DKW, KWD, KDW i wszystkie są jednakowo prawdopodobne. Jeśli je ponumerujemy liczbami od 1 do 6, to określimy ,,słownik" do przekładu wyniku rozkładania w rzędzie trzech potasowanych kart na wynik rzutu kostką.

Uwagi końcowe

Rachunek prawdopodobieństwa kojarzy nam się wyłącznie z rachunkami. W pracy pokazano, że ten dział matematyki wyróżnia się osobliwością zadań, w których chodzi o wnioskowania przez analogie i specyficzne stochastyczne równoważności, o organizację fazy matematyzacji oraz fazy interpretacji. Do szczególnych zadań zaliczyć można konstruowanie sposobów symulowania doświadczenia losowego.

Bibliografia

Krygowska, Z. (1986) *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6.

Płocki, A. (2005) *Dydaktyka stochastyki*, Płock: Wydawnictwo Naukowe NOVUM

Płocki, A. (2011) *Prawdopodobieństwo wokół nas*, Bielsko-Biała: Wydawnictwo dla Szkoły

Płocki, A., Tlustý, P. (2011) *Kombinatoryka wokół nas*, Płock: Wydawnictwo Naukowe NOVUM

Steinhaus, H. (1961) *Orzeł czy reszka*, Warszawa: PWN